

DOI: 10.7652/xjtuxb201307020

受热冲击时球体的广义热弹性分析

赵伟涛¹, 吴九汇¹, 白宇², 韩志海²

(1. 西安交通大学机械工程学院, 710049, 西安; 2. 西安交通大学金属材料强度国家重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 基于具有 2 个热松弛时间的 G-L 广义热弹性理论, 研究了实心球体外表面突然受到均匀热冲击时的广义热弹性问题。由于控制方程复杂, 到目前为止此类问题的解析解还没有得到。文中利用拉普拉斯正、反变换技术和热冲击的瞬时特征对该问题进行求解, 最终得到了位移场和温度场的渐近表达式; 通过数值计算, 获得了热冲击下实心球体的位移与温度分布规律, 以及热松弛时间和耦合系数对位移及温度分布的影响。结果表明: 位移及温度分布中存在 2 个阶跃点; 热松弛时间和耦合系数对位移及温度的阶跃时间、阶跃间隔和阶跃峰值均产生影响, 对热冲击的作用效果也有一定的抑制作用。

关键词: G-L 广义热弹性理论; 拉普拉斯变换; 热松弛时间; 热弹性耦合系数

中图分类号: O343.6 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-0987X(2013)07-0108-06

Generalized Thermoelastic Analysis for Sphere under Thermal Shock

ZHAO Weitao¹, WU Jiuhui¹, BAI Yu², HAN Zhihai²

(1. School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. State Key Laboratory for Mechanical Behavior of Materials, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Following the theory of generalized Green-Lindsay thermoelasticity with two relaxation times, the response of a solid sphere under thermal shock is analyzed. With Laplace transform and its inversion, the asymptotic solutions of the displacement and temperature are obtained by the transient characteristic of thermal shock. Through numerical calculation, the rules of the sphere's displacement and temperature distributions are discovered, and the influences of the thermal relaxation time and the thermoelastic coupling coefficient on the distributions are also revealed. It is found that there are two step points in both displacement and temperature distributions; the step time, the interval and the peak value of step are affected by the thermal relaxation time and the thermoelastic coupling coefficient, which weakens the effect of thermal shock.

Keywords: G-L generalized thermoelasticity; Laplace transform; thermal relaxation time; thermoelastic coupling coefficient

对于热作用时间较长的稳态传热过程以及热传播速度较快的非稳态常规传热过程, 人们通常采用傅里叶定律来描述热流密度与温度梯度之间的关系, 而且可以满足精度要求。但是, 随着超短激光脉

冲的出现和制冷水平的提高, 出现了极高(低)温条件下的传热问题和超急速传热问题, 使得傅里叶定律中的准平衡条件假设不再成立^[1]。

Cattaneo 和 Tzou 分别于 1948 年和 1995 年推

收稿日期: 2012-10-21。 作者简介: 赵伟涛(1986—), 男, 博士生; 吴九汇(通信作者), 男, 教授, 博士生导师。 基金项目: 国家“973 计划”资助项目(2007CB707702, 2011CB610306); 教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-09-0644)。

网络出版时间: 2013-04-15

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20130415.0941.002.html>

导出描述温度传播过程的双曲型热传导方程^[2-3],这种基于非傅里叶定律的热传导理论统称为广义热传导理论。1960 年代,在广义热传导理论的基础上,广义热弹性理论的研究也得到了迅速发展。Lord 和 Shulman^[4](简称为 L-S)、Green 和 Lindsay^[5](简称为 G-L)、Green 和 Naghdi^[6](简称为 G-N)分别对经典热弹性理论进行了修正,各自建立了广义热弹性理论。利用这些理论,可以充分地展示热扰动在介质内传播的波动效应,但是这些理论所包含的控制方程比较复杂,对于不同的问题,其求解方法也不相同。基于 L-S 理论,Wang 等人采用傅里叶级数展开法对一维热弹性问题进行了求解^[7];Al-hunuti、万强等人采用拉普拉斯变换法分别对细杆中移动热源作用下的热弹响应和一维半无限长压电杆的瞬态热冲击问题进行了研究^[8-9];El-Maghraby 等人采用状态空间法对热和机械冲击下的二维热弹性问题进行了研究^[10]。基于 G-L 理论,Tehrani 等人采用边界元法对有限体受到热和机械冲击时的热弹性问题进行了研究^[11];Tian 等人采用有限元数值方法对控制方程进行了直接耦合求解^[12];何天虎等人采用拉普拉斯变换法对两端固定杆的广义热弹耦合问题进行了研究^[13]。基于 G-N 理论并采用拉普拉斯变换法,Chandrasekharaiah 等人对半空间体的热弹性响应进行了研究^[14];Taheri 等人研究了热冲击作用下的一维热弹响应问题^[15]。前人对广义热弹性理论的求解大多是关于一维无限长杆、无限大平板或有限厚度平板的,而对于球体受到热冲击时的广义热弹性问题的解析解,目前尚未见有人研究。

本文应用具有 2 个热松弛时间的 G-L 广义热弹性理论,对球形(颗粒状)物质表面突然受到均匀热冲击时的位移场、温度场特性进行了理论分析,并通过具体算例,给出了位移、温度分布规律图,以期深入研究球形物质在激光加热、快速熔化等过程中的超急速传热规律提供依据。

1 数学模型

考虑一半径为 R_0 、均质、各向同性的球体,假设其初始温度为 T_0 ,当 $t=0$ 时,球体外表面突然受到一温度 T_1 的作用。

在球坐标下,不考虑体力时的运动方程为

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = \rho \ddot{u} \quad (1)$$

式中: σ_r 和 σ_θ 分别是径向和环向应力; ρ 是密度; u 是球体的径向位移,上面的 2 个点表示对时间的二

阶微分。

由虎克定律,得线性热弹性材料的本构方程^[16]

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\lambda \frac{u}{r} - \beta[(T - T_0) + \tau_1 \dot{T}] \quad (2)$$

$$\sigma_\theta = \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + 2(\lambda + \mu) \frac{u}{r} - \beta[(T - T_0) + \tau_1 \dot{T}] \quad (3)$$

式中: λ 和 μ 为拉梅常数; $\beta = \alpha(3\lambda + 2\mu)$ 为热力系数; α 为线性热膨胀系数; T 为球体的热力学温度; τ_1 为其中一个热松弛时间。

将式(2)和式(3)代入式(1),可得球坐标下位移场的控制方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} - \frac{\beta}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial T}{\partial r} + \tau_1 \frac{\partial \dot{T}}{\partial r} \right) = \frac{1}{c_1^2} \ddot{u} \quad (4)$$

式中: $c_1 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}$ 为弹性波第一声速。

根据 G-L 广义热弹性理论,球坐标下的温度控制方程为

$$c_K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \tau_2 \ddot{T} - \dot{T} - \frac{\beta T_0}{\rho c} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right) \dot{u} = 0 \quad (5)$$

式中: τ_2 为另一个热松弛时间; c 为常应变下的比热容; $c_K = \kappa / \rho c$ 为热扩散系数, κ 为热传导系数。

为了获得控制方程(2)、(4)、(5)的归一化形式,特引入以下归一化量

$$\bar{r} = \frac{c_1}{c_K} r; \quad \bar{t} = \frac{c_1^2}{c_K} t; \quad \bar{\tau}_1 = \frac{c_1^2}{c_K} \tau_1; \quad \bar{\tau}_2 = \frac{c_1^2}{c_K} \tau_2;$$

$$\bar{T} = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}; \quad \bar{u} = \frac{c_1(\lambda + 2\mu)}{c_K \beta (T_1 - T_0)} u;$$

$$\bar{\sigma}_r = \frac{1}{\beta(T_1 - T_0)} \sigma_r$$

为了简便,下面省掉归一化符号上方的横线,则式(2)、(4)、(5)归一化之后变为

$$\sigma_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{u}{r} - (T + \tau_1 \dot{T}) \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} - \left(\frac{\partial T}{\partial r} + \tau_1 \frac{\partial \dot{T}}{\partial r} \right) = \ddot{u} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \tau_2 \ddot{T} - \dot{T} - \delta \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right) \dot{u} = 0 \quad (8)$$

式中: $\delta = \frac{\beta T_0}{\rho c(\lambda + 2\mu)}$ 为热弹性耦合系数。

给定边界条件:在 $r=1$ 处(为了方便对结果进行分析,在文中归一化后的半径取为 1)

$$\sigma_r = 0; \quad T = H(t) \quad (9)$$

式中: $H(t)$ 为 Heaviside 函数。

初始条件:在 $t=0$ 时

$$u = \dot{u} = 0; \quad T = \dot{T} = 0 \quad (10)$$

2 问题求解

2.1 拉普拉斯积分域内问题的求解

结合初始条件式(10),对式(6)~(8)进行拉普拉斯变换得

$$\sigma_{rr}^* = \frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{u^*}{r} - \omega_1 T^* \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u^*}{\partial r} - \frac{2u^*}{r^2} - \omega_1 \frac{\partial T^*}{\partial r} = s^2 u^* \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T^*}{\partial r} - \omega_2 T^* - \omega_3 \left(\frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{2u^*}{r} \right) = 0 \quad (13)$$

式中: $\omega_1 = 1 + \tau_1 s$; $\omega_2 = s(1 + \tau_2 s)$; $\omega_3 = \delta s$; s 为拉普拉斯参量;变量右上角的“*”表示对该变量进行拉普拉斯变换。

对边界条件式(9)进行拉普拉斯变换

$$r = 1: \quad \sigma_{rr}^* = 0; \quad T^* = \frac{1}{s} \quad (14)$$

联合式(12)和(13)消去 u^* ,并且令 $\omega_4 = \omega_1 \omega_3$,可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T^*}{\partial r} \right) - \omega_2 T^* \right) \right) - \\ & s^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T^*}{\partial r} \right) - \omega_2 T^* \right) = \frac{\omega_4}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T^*}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

对式(15)进一步整理得

$$(\nabla_1^2 - s^2)(\nabla_1^2 - \omega_2)T^* = \omega_4 \nabla_1^2 T^* \quad (16)$$

式中: $\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ 。

同理,联合式(12)和(13)消去 T^* ,可得

$$(\nabla_2^2 - s^2)(\nabla_2^2 - \omega_2)u^* = \omega_4 \nabla_2^2 u^* \quad (17)$$

式中: $\nabla_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r^2}$ 。

通过变量代换 $T^* = \frac{\tilde{T}^*}{r^{1/2}}$ 和 $u^* = \frac{\tilde{u}^*}{r^{1/2}}$,可得方程

(16)和(17)的解为

$$T^* = r^{-1/2} [A_1 I_{1/2}(D_1 r) + A_2 I_{1/2}(D_2 r)] \quad (18)$$

$$u^* = r^{-1/2} [B_1 I_{3/2}(D_1 r) + B_2 I_{3/2}(D_2 r)] \quad (19)$$

式中: $I_{1/2}$ 和 $I_{3/2}$ 是虚宗量贝塞尔函数; A_i 和 B_i ($i=1,2$) 是积分常数,它们可以通过边界条件式(14)来确定; D_i 是下面方程的算术根

$$D^4 - (s^2 + \omega_2 + \omega_4)D^2 + \omega_2 s^2 = 0 \quad (20)$$

把式(18)和(19)代入式(12)或(13),可得

$$A_i = \frac{D_i^2 - s^2}{\omega_1 D_i} B_i \quad (21)$$

把式(21)代入式(18),得

$$T^* = r^{-1/2} \left[\frac{D_1^2 - s^2}{\omega_1 D_1} B_1 I_{1/2}(D_1 r) + \frac{D_2^2 - s^2}{\omega_1 D_2} B_2 I_{1/2}(D_2 r) \right] \quad (22)$$

把式(11)、(19)和(22)代入边界条件式(14),可得关于 B_i 的关系式

$$k_v B_1 I_{3/2}(D_1) + \frac{s^2}{D_1} B_1 I_{1/2}(D_1) +$$

$$k_v B_2 I_{3/2}(D_2) + \frac{s^2}{D_2} B_2 I_{1/2}(D_2) = 0 \quad (23)$$

$$\frac{D_1^2 - s^2}{\omega_1 D_1} B_1 I_{1/2}(D_1) + \frac{D_2^2 - s^2}{\omega_1 D_2} B_2 I_{1/2}(D_2) = \frac{1}{s} \quad (24)$$

式中: $k_v = \frac{4\mu}{\lambda + 2\mu}$ 。

联合式(23)和(24),可得到 B_i 的表达式

$$B_1 = \frac{M_1}{N}; \quad B_2 = \frac{M_2}{N} \quad (25)$$

式中

$$M_1 = -\frac{1}{s} \left[k_v I_{3/2}(D_2) + \frac{s^2}{D_2} I_{1/2}(D_2) \right]$$

$$M_2 = \frac{1}{s} \left[k_v I_{3/2}(D_1) + \frac{s^2}{D_1} I_{1/2}(D_1) \right]$$

$$N = \frac{D_2^2 - s^2}{\omega_1 D_2} \left[k_v I_{3/2}(D_1) + \frac{s^2}{D_1} I_{1/2}(D_1) \right] I_{1/2}(D_2) -$$

$$\frac{D_1^2 - s^2}{\omega_1 D_1} \left[k_v I_{3/2}(D_2) + \frac{s^2}{D_2} I_{1/2}(D_2) \right] I_{1/2}(D_1)$$

将式(25)分别代入式(11)、(19)和(22)中,可得拉普拉斯积分域内应力场、位移场和温度场的解析表达式。

2.2 时间极短问题的渐近解

对式(20)进行求解,取算术根,可得 D_i 的表达式

$$D_{1,2} = \left[\frac{s^2 + \omega_2 + \omega_4 \pm [(s^2 + \omega_2 + \omega_4)^2 - 4\omega_2 s^2]^{1/2}}{2} \right]^{1/2} \quad (26)$$

本文的分析是针对时间极短的情况而言的,当 $t \rightarrow 0$ 时, $s \rightarrow \infty$,则式(26)有以下近似^[17]

$$D_{1,2} \approx k_{1,2} s + m_{1,2} \quad (27)$$

式中

$$k_{1,2} = \left(\frac{1 + \tau_2 + \delta \tau_1 \pm g^{1/2}}{2} \right)^{1/2}$$

$$m_{1,2} = \frac{1 + \delta \pm h/g^{1/2}}{4k_{1,2}}$$

$$g=(1+\tau_2+\delta\tau_1)^2-4\tau_2$$
$$h=(1+\delta)(\delta\tau_1+\tau_2)+\delta-1$$

于是,有以下近似

$$\frac{D_1^2-s^2}{\omega_1 D_1}\approx\frac{k_3}{\tau_1 k_1};\quad \frac{D_2^2-s^2}{\omega_1 D_2}\approx\frac{k_4}{\tau_1 k_2}\quad (28)$$

式中: $k_{3,4}=\frac{-1+\tau_2+\delta\tau_1\pm g^{1/2}}{2}$ 。

根据虚宗量贝塞尔函数的性质,当 $x\gg\left|v^2-\frac{1}{4}\right|$ 时,有如下近似

$$I_\nu(x)\approx\frac{1}{(2\pi x)^{1/2}}e^x\quad (29)$$

将式(27)~(29)代入式(25),整理可得

$$B_1=\frac{\tau_1(k_\nu+s/k_2)}{s(ps+q)}(2\pi D_1)^{1/2}e^{-D_1}\quad (30)$$

$$B_2=-\frac{\tau_1(k_\nu+s/k_1)}{s(ps+q)}(2\pi D_2)^{1/2}e^{-D_2}\quad (31)$$

式中: $p=\frac{k_3-k_4}{k_1 k_2}$; $q=\left(\frac{k_3}{k_1}-\frac{k_4}{k_2}\right)k_\nu$ 。

引入拉普拉斯反变换公式

$$L^{-1}(s^{-n}e^{-st_0})=\frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}H(t-t_0)\quad (32)$$

将式(30)和(31)分别代入 u^* 和 T^* 的表达式中,利用拉普拉斯反变换公式(32),得到时间域内 u 、 T 的表达式

$$u=\frac{\tau_1}{r}\left[\frac{e^{m'_1}}{k_2 p}\left[1+\left(k_2 k_\nu-\frac{q}{p}\right)t'_1\right]H(t'_1)-\frac{e^{m'_2}}{k_1 p}\left[1+\left(k_1 k_\nu-\frac{q}{p}\right)t'_2\right]H(t'_2)\right]\quad (33)$$

$$T=\frac{1}{r}\left[\frac{k_3 e^{m'_1}}{k_1 k_2 p}\left[1+\left(k_2 k_\nu-\frac{q}{p}\right)t'_1\right]H(t'_1)-\frac{k_4 e^{m'_2}}{k_1 k_2 p}\left[1+\left(k_1 k_\nu-\frac{q}{p}\right)t'_2\right]H(t'_2)\right]\quad (34)$$

式中: $m'_{1,2}=-(1-r)m_{1,2}$; $t'_{1,2}=t-(1-r)k_{1,2}$ 。

3 结果分析

考虑一归一化半径为 1 的铜质实心圆球。计算中需要用到的参数如下: $\kappa=386\text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$; $\alpha=1.78\times 10^{-5}\text{ K}^{-1}$; $\mu=43.89\text{ GPa}$; $\lambda=71.62\text{ GPa}$; $c=383.1\text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$; $\rho=8\,954\text{ kg}/\text{m}^3$; $T_0=300\text{ K}$ 。材料的热松弛时间在常温下取 $\tau_1=\tau_2=10^{-11}\text{ s}$ 。

图 1、图 2 分别给出了不同时刻球体内位移场和温度场的分布规律。由图 1 可以看出,当球体外表面受到热冲击作用时,热扰动以有限的速度传播,球体内的热膨胀由外向内扩展,随着时间的推移,球体外表面的位移越来越大。在位移的分布图中存在

2 个阶跃点,分别位于 $r_1=1-t/k_2$ 和 $r_2=1-t/k_1$ 处。在阶跃点处, u 的阶跃值 $u(r,t)=u^+(r,t)-u^-(r,t)$, $u^+(r,t)$ 和 $u^-(r,t)$ 分别为从右边和左边趋近于 r 时 u 的函数值。当 r 的值小于第一个阶跃点 r_1 的值时,位移分布都为 0。在第一个阶跃点到达该位置一段时间后,位移分布再次呈现阶跃,即在热扰动传播过程中,位移的分布出现 2 次阶跃。这种现象在温度的分布中也同样存在。

由图 2 可以看出,在温度的分布图中也存在 2 个阶跃点,分别位于 $r_1=1-t/k_2$ 和 $r_2=1-t/k_1$ 处。在阶跃点处, T 的阶跃值 $T(r,t)=T^+(r,t)-T^-(r,t)$, $T^+(r,t)$ 和 $T^-(r,t)$ 分别为从右边和左边趋近于 r 时 T 的函数值。在第二个阶跃点之后温度逐渐下降,最终趋近于 1。

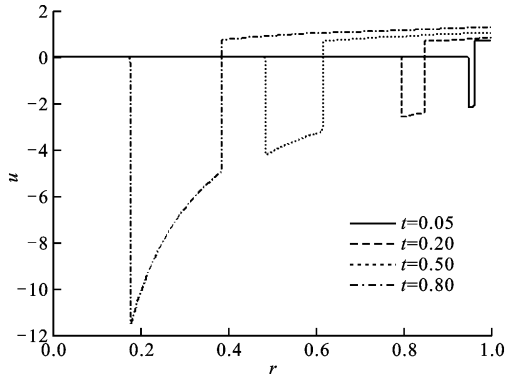


图 1 不同时刻球体内的归一化位移分布

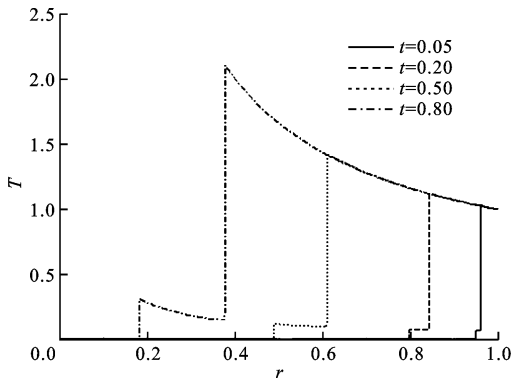


图 2 不同时刻球体内的归一化温度分布

图 3、图 4 为 2 个不同热松弛时间下的温度场分布。从图中可以看到:热松弛时间 τ_1 没有热松弛时间 τ_2 对温度的影响大;即使 τ_1 有很大的变化,温度的变化也只是第一阶跃点的稍稍提前,而后半段曲线基本重合;随着 τ_2 的增大,阶跃点右移,2 次阶跃的间隔变长,阶跃峰值降低。

图 5、图 6 给出了不同耦合系数下的位移场和温度场分布。耦合系数 δ 对位移和温度 2 次阶跃的

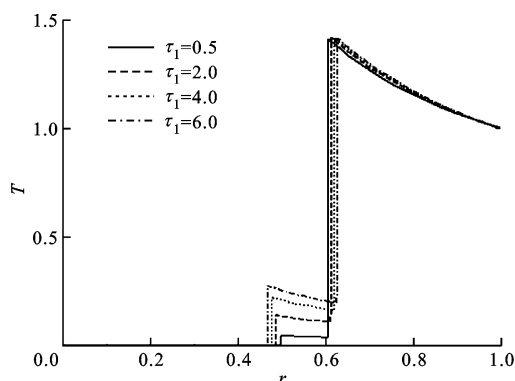
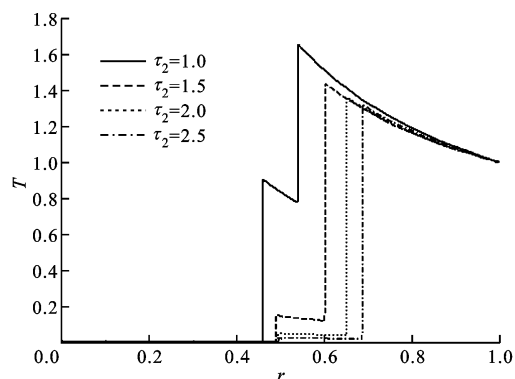
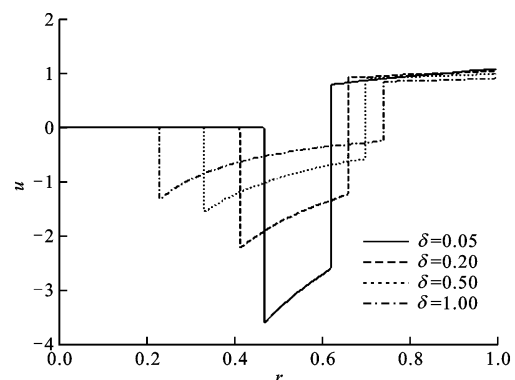
图3 不同归一化热松弛时间 τ_1 下的归一化温度分布图4 不同归一化热松弛时间 τ_2 下的归一化温度分布

图5 不同归一化耦合系数下的归一化位移分布

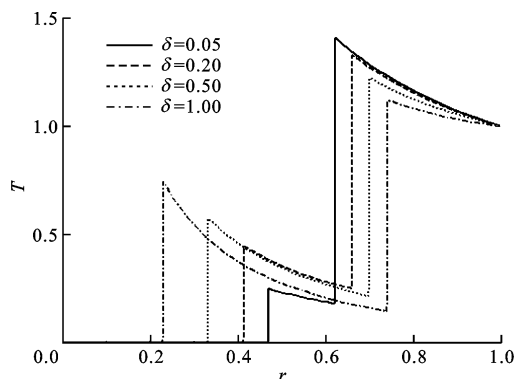


图6 不同归一化耦合系数下的归一化温度分布

时间间隔以及阶跃产生的峰值大小都有重要影响:随着 δ 的增大,第一个阶跃点左移,2次阶跃的间隔变长,形成的阶跃峰值变小。

4 结 论

本文应用具有2个热松弛时间的G-L广义热弹性理论,分析了实心球体表面受热冲击作用时的情况,得到了热冲击下实心球体的位移和温度的分布规律,并分析了热松弛时间、耦合系数对位移和温度的影响。结果显示:在位移和温度分布中都存在2个阶跃点,证实了热传导是以波的形式,以有限速度而不是无限速度在弹性体中传播;热松弛时间和耦合系数对阶跃时间、阶跃间隔和阶跃峰值都有重要的影响,对热冲击有一定的抑制作用,但2个热松弛时间的抑制效果并不相同。

参考文献:

- [1] 田晓耕, 沈亚鹏. 广义热弹性问题研究进展 [J]. 力学进展, 2012, 42(1): 18-28.
TIAN Xiaogeng, SHEN Yapeng. Research progress in generalized thermoelastic problems [J]. Advances in Mechanics, 2012, 42(1): 18-28.
- [2] CATTANEO C. Sulla conduzione del calore [J]. Atti del Seminario Matematico e Fisico della Universita di Modena, 1948, 3(3): 83-101.
- [3] TZOU D Y. A unified field approach for heat conduction from macro- to micro-scales [J]. Journal of Heat Transfer, 1995, 117(1): 8-16.
- [4] LORD H W, SHULMAN Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1967, 15(5): 299-309.
- [5] GREEN A E, LINDSAY K A. Thermoelasticity [J]. Journal of Elasticity, 1972, 2(1): 1-7.
- [6] GREEN A E, NAGHDI P M. Thermoelasticity without energy dissipation [J]. Journal of Elasticity, 1993, 31(3): 189-208.
- [7] WANG X, XU X. Thermoelastic wave induced by pulsed laser heating [J]. Applied Physics: A, 2001, 73(1): 107-114.
- [8] AL-HUNITI N S, AL-NIMR M A, NAJI M. Dynamic response of a rod due to a moving heat source under the hyperbolic heat conduction model [J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 242(4): 629-640.
- [9] 万强, 田晓耕, 沈亚鹏. 半无限长压电杆的瞬态热冲击问题 [J]. 固体力学学报, 2003, 24(1): 98-108.
WAN Qiang, TIAN Xiaogeng, SHEN Yapeng. Transient thermal shock problem of a semiinfinite piezoelec-

- tric rod [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2003, 24(1): 98-108.
- [10] EL-MAGHRABY N M, YOSSEF H M. A two-dimensional thermoelasticity problem for thermomechanical shock with two relaxation times [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2005, 170(1): 172-184.
- [11] TEHRANI P H, ESLAMI M R. Boundary element analysis of Green and Lindsay theory under thermal and mechanical shock in a finite domain [J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2000, 23(8): 773-792.
- [12] TIAN Xiaogeng, SHEN Yapeng, CHEN Changqing, et al. A direct finite element method study of generalized thermoelastic problems [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43(7/8): 2050-2063.
- [13] 何天虎, 田晓耕, 沈亚鹏. 一维半无限压电杆的广义的热冲击问题 [J]. *力学学报*, 2003, 35(2): 158-165.
HE Tianhu, TIAN Xiaogeng, SHEN Yapeng. One-dimensional generalized thermal shock problem for a semi-infinite piezoelectric rod [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 35(2): 158-165.
- [14] CHANDRASEKHAR A IAH D S. One-dimensional wave propagation in the linear theory of thermoelasticity without energy dissipation [J]. *Journal of Thermal Stresses*, 1996, 19(8): 695-710.
- [15] TAHERI H, FARIBORZ S, ESLAMI M R. Thermoelasticity solution of a layer using the Green-Naghdi model [J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2004, 27(9): 795-809.
- [16] BAGRI A, ESLAMI M R. A unified generalized thermoelasticity: solution for cylinders and spheres [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2007, 49(12): 1325-1334.
- [17] BALLA M. Analytical study of the thermal shock problem of a half-space with various thermoelastic models [J]. *Acta Mechanica*, 1991, 89(1/2/3/4): 73-92.

(编辑 葛赵青)

(上接第84页)

- [5] 刘进强, 韩东, 王瑞发. 大型汽轮发电机定子绕组端部振动测量研究 [J]. *大电机技术*, 2000(4): 11-15.
LIU Jinqiang, HAN Dong, WANG Ruifa. Research on measuring the vibration of stator end windings for large turbogenerator [J]. *Large Electric Machine and Hydraulic Turbine*, 2000(4): 11-15.
- [6] 嵇安森. 发电机定子绕组端部振动静态特性的试验研究 [J]. *电力设备*, 2004, 5(9): 38-40.
JI Ansen. Testing and study on the static characteristics of end part vibration of generator's stator winding [J]. *Electric Equipment*, 2004, 5(9): 38-40.
- [7] LIAO Wei, GAO Yongge, ZHANG Haijun. Analytical investigation of dynamic characteristic for stator end-winding of turbo-generator of 600 MW [C]// *Proceedings of International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation*. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2009: 19-21.
- [8] DRUBEL O, KULIG S, SENSKE K. End winding deformations in different turbo generators during 3-phase short circuit and full load operation [J]. *Electrical Engineering*, 2000, 82(3): 145-152.
- [9] 徐福娣, 沈永连, 梁旭彪. 汽轮发电机定子绕组端部振动计算研究 [J]. *上海大中型电机*, 1998(2): 20-28.
XU Fudi, SHEN Yonglian, LIANG Xubiao. Calculation and study of the vibration of stator end windings for large turbogenerator [J]. *Shanghai Medium and Large Electrical Machines*, 1998(2): 20-28.
- [10] 王玉田, 袁晓红. 大型汽轮发电机定子绕组端部固定方法 [J]. *大电机技术*, 2011(2): 15-16.
WANG Yutian, YUAN Xiaohong. Discussion on fixing methods of large turbogenerator stator endings overhang [J]. *Large Electric Machine and Hydraulic Turbine*, 2011(2): 15-16.
- [11] THOMSON W T, DAHLEH M D. *Theory of vibration with applications* [M]. 5th ed. 北京: 清华大学出版社, 2005: 183-185.

(编辑 葛赵青)